## Лекция 3_ЖСТ-дағы денелердің үдемелі және ілгермелі қозғалыстарының теңдеулері

Классикалық механикада әдетте зерттелетін қозғалыстар түрін сипаттайтын нақты дифференциалдық теңдеулер белгілі болса, Жалпы салыстырмалылық теориясында қозғалыстың нақты теңдеулері тек сынақ денелер үшін белгілі. Мысалы олар, геодезия теңдеулері, спині бар бөлшек үшін Папапетру қозғалыс теңдеулері, зарядталған бөлшек үшін қозғалыс теңдеулері және т.б.

Салыстырмалы массалары бар денелер жағдайында қозғалыс орнықтылығы мәселесінің қатаң тұжырымы әлі анық емес, өйткені бұл жағдайда қозғалыстың нақты теңдеулері белгісіз және олар белгілі бір жуықтауда ғана алынған. Салыстырмалы массалық денелер үшін орнықтылық есебін жалпы салыстырмалық теориясында құрастыру келесідей болады. Ілгерілемиелі және айналмалы қозғалыс теңдеулеріндегі релятивистік түзетулер Ньютондық қозғалыс теңдеулеріне қатысты тұрақты ұйытқулар ретінде қарастырылады. Басқаша айтқанда, Ньютон қозғалысының орнықтылығы ЖСТ тұрғысынан (Ньютоннан кейінгі бірінші жуықтау тұрғысынан) анықталады. Денелердің қозғалысының орнықтылығын ЖСТ-ның өзінде, тіпті постньютондық жуықтауда қарастыру, ең болмағанда, постньютоннан кейінгі жуықтауда қозғалыс теңдеулерін меңгеруді талап етеді.

Сонымен, біз ЖСТ орнықтылықтың ұйытқулар, яғни релятивистік ұйытқулар тұрақты түрде әсер ететін түрімен айналысамыз. Оның үстіне ЖСТ механикасында қарастырылатын есептердің көпшілігі релятивистік ауытқулардың Ньютон күшімен салыстырғанда аздығына байланысты квазикеплерлік болып табылады. Бұл жағдай ЖСТ-дағы денелердің қозғалысы мәселесінің есептерін және басқа мәселелерін зерттеудің арнайы, оңтайлы, қарапайым әдістерін іздеуге мүмкіндік береді.

Біз материалдық бөлшектің массивті шардың өрісіндегі Фоктың нақтылыланған бірінші жуықтау метрикасы негізінде финитті қозғалысы жайындағы есепті қарастыралық, әдетте мұндай есепті Лензе-Тирринг деп атаймыз [1]

$$dS^2 = \left[ c^2 - 2U + \frac{2U^2}{c^2} - \frac{2\gamma}{c^2}\int \frac{\rho'\left(\frac{3}{2}V^2 + \Pi - U\right)' - P'_{kk}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}(dx')^3 \right] dt^2 -$$

$$-\left(1 + \frac{2U}{c^2}\right)\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) + \frac{8}{c^2}\left(U_1 dx_1 + U_2 dx_2 + U_3 dx_3\right)dt, \tag{1}$$

мұндағы $\rho'$ - массаның тығыздығы, $V_i$ - жылдамдықтың дененің ішкі құраушылары, $\Pi$ - масса бірлігінің серпімді энергиясы, $P_{ik}$ - үшөлшемді кернеулер тензоры; $U, U_i$ - ньютон потенциалы және вектор потенциалы. Айналмалы сұйық шардың ішкі құрылымына қатысты инегралына тоқталсақ

$$\int \frac{\rho'\left(\frac{3}{2}V^2+\Pi-U\right)'+3P'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}(dx')^3=\frac{\xi_0}{r}-\frac{2}{7m_0}\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right), \quad (2)$$

мұндағы

$$\xi_0=\frac{8}{3}T_0+\frac{2}{3}\varepsilon_0; \quad (3)$$

$\vec{S}_0$ - угловой момент шардың бұрыштық моменті; $T_0$ - дененің айналу кинетикалық энергиясы; $\varepsilon_0$ - кері таңбамен алынған бөлшектердің өзара тартылыс энергиясы. Сонымен, (1) түрдегі айналмалы сұйық шардың метрикасы [1]

$$dS^2=\left[c^2-2U\left(1+\frac{\xi_0}{m_0c^2}\right)+\frac{2U^2}{c^2}+\frac{4\gamma}{7m_0c^2}\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\right]dt^2-\left(1+\frac{2U}{c^2}\right)d\vec{r}^{\,2}+\frac{8}{c^2}\left(\vec{U}d\vec{r}\right)dt, \quad (4)$$

мұндағы

$$U=\frac{\gamma m_0}{r},\ \vec{U}=-\frac{\gamma}{2r^3}\left[\vec{r}\vec{S}_0\right]. \quad (5)$$

Еске сала кетейік

$$\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)=-\frac{S_0^2}{r^3}+\frac{3\left(\vec{r}\vec{S}_0\right)^2}{r^5}. \quad (6)$$

(4) түрдегі метриканың осы сияқты бірінші жуықтаудағы метрикаларға қарағанда айырмашылығы болып оның Шварцшильд есебін дұрыс сипаттайтвндығын айтуға болады [1], сонымен қатар, Лензе-Тирринг есебіндегі қарастырылатын маңызды шама $\vec{S}_0$ бейсызық мүшені ескереді. Есептің Лагранжианын табамыз

$$ds=cdt\left\{1-\frac{U}{c^2}\left(1+\frac{\xi_0}{m_0c^2}\right)+\frac{U^2}{2c^4}+\frac{2\gamma}{7m_0c^4}\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)-\frac{\vec{v}^2}{2c^2}-\frac{3U\vec{v}^2}{2c^4}+\frac{4}{c^4}\left(\vec{U}\vec{v}\right)-\frac{\vec{v}^4}{8c^4}\right\}; \quad (7)$$

Сонымен, Лензе-Тирринг есебіне арналған Лагранж функциясы

$$L=-mc^2\left\{1-\frac{U}{c^2}\left(1+\frac{\xi_0}{m_0c^2}\right)+\frac{U^2}{2c^4}+\frac{2\gamma}{7m_0c^4}\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)-\frac{\vec{v}^2}{2c^2}-\frac{3U\vec{v}^2}{2c^4}+\frac{4}{c^4}\left(\vec{U}\vec{v}\right)-\frac{\vec{v}^4}{8c^4}\right\};$$

(8)

Лензе-Тирринг есебіне арналған гамильтониан:

$$H=\vec{v}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}-L=\left|\vec{v}\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=\vec{v}\cdot\vec{P}=mv^2+\frac{3U}{c^2}mv^2-\frac{4m}{c^2}\left(\vec{U}\vec{v}\right)+\frac{m}{2c^2}v^4\right|=$$

$$=mv^2+\frac{3U}{c^2}mv^2-\frac{4m}{c^2}\left(\vec{U}\vec{v}\right)+\frac{m}{2c^2}v^4+mc^2\left\{\mathbf{1-}\frac{\mathbf{U}}{\mathbf{c^2}}\left(1+\frac{\xi_0}{m_0c^2}\right)+\frac{\mathbf{U^2}}{2c^4}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\gamma}{7m\,c^4}\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\right)\left(\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)-\frac{v^2}{2c^2}-\frac{3}{2}\frac{U\vec{v}^2}{c^4}+\frac{4}{c^4}\left(\vec{U}\vec{v}\right)-\frac{\vec{v}^4}{8c^4}\right\};$$

(9)

Сынақ денесінің жылдамдығын оның импульсі арқылы жазамыз.

$$\vec{p}=\frac{\partial L}{\partial\vec{v}}=m\vec{v}+\frac{m\vec{v}}{c^2}\left[\frac{v^2}{2}+\frac{2\varepsilon}{3m}+3U\right]+\frac{2\gamma m}{c^2}\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]. \qquad (10)$$

Жылдамдық арқылы

$$\vec{v}=\frac{\vec{p}}{m}-\left[3U+\frac{p^2}{2m^2}+\frac{2\varepsilon}{3m}\right]\frac{\vec{p}}{mc^2}-\frac{2\gamma}{c^2}\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right], \qquad (11)$$

Гамильтонианды жазсақ

$$H=mc^2+\frac{P^2}{2m}-mU-\frac{1}{c^2}\left(\frac{P^4}{8m^3}+\frac{3P^2U}{2m}+\frac{\xi_0}{m_0}mU-\frac{1}{2}mU^2\right)-$$

$$-\frac{2\gamma}{c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\vec{P}\right)-\frac{2\gamma m}{7m_0c^2}\left(\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\right]\left[\vec{S}_0\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right]\right).$$

(12)

Қозғалыс теңдеулері

$$\dot{\vec{M}}=\left[\dot{\vec{r}}\vec{p}\right]+\left[\vec{r}\dot{\vec{p}}\right], \qquad (13)$$

$$\dot{\vec{A}}=\left[\frac{\dot{\vec{p}}}{m}\vec{M}\right]+\left[\frac{\vec{p}}{m}\dot{\vec{M}}\right]-m\left[\vec{\nabla}U\left[\vec{r}\dot{\vec{r}}\right]\right]. \qquad (14)$$

мұндағы $\vec{M}, \vec{A}$ - орбитаның векторлық элементтері (импульс моменті және Лаплас векторы) және

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{P}], \tag{15}$$

$$\vec{A} = \left[\frac{\vec{P}}{m}\vec{M}\right] - \frac{\gamma m m_0}{r}\vec{r}, \tag{16}$$

$$A = \gamma m m_0 e = \alpha e \tag{17}$$

мұндағы $E$ - релятивистік емес энергия, $e$ - орбитаның эксцентриситеті.

Қарастырылып отырған есептің қозғалыс теңдеуін $\vec{M}$ және $\vec{A}$ векторлық элементтер арқылы жазамыз. Бұл теңдеулерде айнымалыларды жылдам және баяу деп ажыратып көрсете алғандықтан бейсызық механиканың асимптотикалық тәсілдерін қолдану тиімді болып табылады [2]. Сонымен, олардың туындылары

$$\dot{\vec{r}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} - \left[3U + \frac{p^2}{2m^2} + \frac{2\varepsilon}{3m}\right]\frac{\vec{p}}{mc^2} - \frac{2\gamma}{c^2}\left[\vec{S}_0 \vec{\nabla}\frac{1}{r}\right], \tag{18}$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}} = m\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{1}{c^2}\left\{\frac{3P^2}{2m}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{m\xi_o}{m_o}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - mU\frac{\partial U}{\partial \vec{r}}\right\} - \frac{2\gamma}{c^2}\left\{\frac{[\vec{P}\vec{S}_o]}{r^3} - \frac{3(\vec{S}_o\vec{M})\vec{r}}{r^5}\right\} - \\ - \frac{2\gamma m}{7m_o c^2}\left\{\frac{3\vec{r}S_o^2}{r^5} + \frac{6(\vec{r}\vec{S}_o)\vec{S}_o}{r^5} - \frac{15(\vec{r}\vec{S}_o)^2\vec{r}_o}{r^7}\right\} = m\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{3P^2}{2mc^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + \frac{m\xi_o}{m_o c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \\ - \frac{mU}{c^2}\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - \frac{2\gamma[\vec{P}\vec{S}_o]}{c^2 r^3} + \frac{6\gamma(\vec{S}_o\vec{M})\vec{r}}{c^2 r^5} - \frac{6\gamma m\vec{r}S_o^2}{7m_o c^2 r^5} - \frac{12\gamma m(\vec{r}\vec{S}_o)\vec{S}_o}{7m_o c^2 r^5} - \frac{30\gamma m(\vec{r}\vec{S}_o)^2\vec{r}_o}{7m_o c^2 r^7};\end{aligned} \tag{19}$$

сонда

$$\dot{\vec{M}} = \frac{2\gamma}{c^2 r^3}[\vec{S}_0\vec{M}] - \frac{12\gamma m}{7m_0 c^2 r^5}(\vec{S}_0\vec{r})[\vec{r}\vec{S}_0], \tag{20}$$

Есептеу жүргізсек

$$\dot{\vec{A}} = \left[\frac{\vec{P}}{m}\dot{\vec{M}}\right] + \left[\frac{\dot{\vec{P}}}{m}\vec{M}\right] - \gamma m m_o \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{21}$$

Сәйкесінше

$$\left[\frac{\vec{P}}{m}\dot{\vec{M}}\right]=\left[\frac{\vec{P}}{m}\left\{\frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]-\frac{12\gamma m}{7m_0c^2r^5}(\vec{S}_o\vec{r})\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]\right\}\right]=$$

$$=\frac{2\gamma}{mc^2r^3}\left[\vec{P}\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]\right]-\frac{12\gamma m}{7m_0c^2r^5}(\vec{S}_o\vec{r})\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]\right];$$

(22)

$$\left[\frac{\dot{\vec{P}}}{m}\vec{M}\right]=-\frac{\gamma m_0}{r^3}\left\{1+\frac{3P^2}{2mc^2}+\frac{\xi_o}{m_oc^2}-\frac{U}{c^2}\right\}\left[\vec{r}\vec{M}\right]-\frac{2\gamma\left[\left[\vec{P}\vec{S}_o\right]\vec{M}\right]}{mc^2r^3}+$$

$$+\frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{mc^2r^5}-\frac{6\gamma S_o^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{7m_oc^2r^5}-\frac{12\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]}{7m_oc^2r^5}+\frac{30\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{7m_oc^2r^7};$$

(23)

$$\gamma mm_o\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=\gamma mm_o\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\vec{P}}{m}\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)+\frac{4\vec{U}}{c^2}\right)\right\}-$$

$$-\gamma mm_o\frac{1}{r^3}\left\{\vec{r}\left(\left(\frac{\vec{P}}{m}\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)+\frac{4\vec{U}}{c^2}\right)\vec{r}\right)\right\}=\frac{m_o\gamma\vec{P}}{r}\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)+$$

$$+\frac{4\gamma mm_o\vec{U}}{rc^2}-\frac{\gamma m_o\vec{r}\left(\vec{P}\vec{r}\right)}{r^3}\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)-\frac{4\gamma mm_o\vec{r}\left(\vec{U}\vec{r}\right)}{c^2r^3}=$$

$$=\gamma m_o\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)\left\{\frac{\vec{P}}{r}-\frac{\vec{r}\left(\vec{P}\vec{r}\right)}{r^3}\right\}+\frac{4\gamma mm_o\vec{U}}{rc^2}-\frac{4\gamma mm_o\vec{r}\left(\vec{U}\vec{r}\right)}{c^2r^3}=$$

$$=\gamma m_o\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)\frac{\left[\vec{r}\left[\vec{P}\vec{r}\right]\right]}{r^3}+\frac{4\gamma mm_o\left[\vec{r}\left[\vec{U}\vec{r}\right]\right]}{c^2r^3}=$$

$$=-\frac{\gamma m_o}{r^3}\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)\left[\vec{r}\vec{M}\right]-\frac{4\gamma mm_o\left[\vec{r}\left[\vec{r}\vec{U}\right]\right]}{c^2r^3}.$$

(24)

ендеше

$$\dot{\vec{A}}=\frac{2\gamma}{mc^2r^3}\left[\vec{P}\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]\right]-\frac{12\gamma m}{7m_0c^2r^5}(\vec{S}_o\vec{r})\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]\right]-\frac{\gamma m_0}{r^3}\left\{1+\frac{3P^2}{2mc^2}+\frac{\xi_o}{m_oc^2}-\frac{U}{c^2}\right\}\left[\vec{r}\vec{M}\right]-$$

$$=\begin{aligned}&-\frac{2\gamma\left[\left[\vec{P}\vec{S}_o\right]\vec{M}\right]}{mc^2r^3}+\frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{mc^2r^5}-\frac{6\gamma S_o^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{7m_oc^2r^5}-\frac{12\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]}{7m_oc^2r^5}+\frac{30\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{7m_oc^2r^7}+\\&+\frac{\gamma m_o}{r^3}\left(1-\frac{3U}{c^2}-\frac{P^2}{2m^2c^2}\right)\left[\vec{r}\vec{M}\right]-\frac{4\gamma mm_o\left[\vec{r}\left[\vec{r}\vec{U}\right]\right]}{c^2r^3}=\end{aligned}$$

$$=\left[\vec{r}\vec{M}\right]\left\{-\frac{\gamma m_0}{r^3}-\frac{3P^2\gamma m_o}{2mc^2r^3}-\frac{\gamma m_o\xi_o}{m_oc^2r^3}+\frac{\gamma m_oU}{r^3c^2}+\right.$$

$$+\frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)}{mc^2r^5}-\frac{6\gamma S_o^2}{7m_oc^2r^5}+\frac{30\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)^2}{7m_oc^2r^7}+\frac{\gamma m_o}{r^3}-\frac{3\gamma m_oU}{r^3c^2}-\frac{\gamma m_oP^2}{2m^2c^2r^3}\Bigg\}+$$

$$+\frac{2\gamma}{mc^2r^3}\left[\vec{P}\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]\right]-\frac{12\gamma}{7m_0c^2r^5}(\vec{S}_o\vec{r})\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]\right]-\frac{2\gamma\left[\left[\vec{P}\vec{S}_o\right]\vec{M}\right]}{mc^2r^3}-$$

$$-\frac{12\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]}{7m_oc^2r^5}+\frac{4\gamma mm_o\left[\vec{r}\left[\vec{r}\vec{U}\right]\right]}{c^2r^3}=-\left[\vec{r}\vec{M}\right]\Bigg\{\frac{2P^2\gamma m_o}{mc^2r^3}+\frac{\gamma\xi_o}{c^2r^3}+\frac{2\gamma m_oU}{r^3c^2}-$$

$$-\frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)}{mc^2r^5}+\frac{6\gamma S_o^2}{7m_oc^2r^5}-\frac{30\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)^2}{7m_oc^2r^7}\Bigg\}+\frac{2\gamma\left[\vec{S}_o\left[\vec{P}\vec{M}\right]\right]}{mc^2r^3}-\frac{12\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]\right]}{7m_oc^2r^5}-$$

$$-\frac{12\gamma\left(\vec{r}\vec{S}_o\right)\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]}{7m_oc^2r^5}+\frac{2\gamma^2mm_o\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]}{c^2r^4}=\left(4E+6mU+\frac{m\xi_o}{m_o}\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2}+$$

$$+\frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_o\vec{A}\right]+\frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{mc^2r^5}-\frac{6\gamma}{7m_oc^2r^5}\Big\{S_o^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]-$$

$$-\frac{5}{r^2}\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]+2\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]+2\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]\right]\Big\}.$$

(25)

соңында

$$\dot{\vec{A}}=\left(4E+6mU+\frac{m\xi_o}{m_o}\right)\frac{\left[\vec{\nabla}U\vec{M}\right]}{mc^2}+\frac{2\gamma}{c^2r^3}\left[\vec{S}_o\vec{A}\right]+\frac{6\gamma\left(\vec{S}_o\vec{M}\right)\left[\vec{r}\vec{M}\right]}{mc^2r^5}-$$

$$-\frac{6\gamma}{7m_oc^2r^5}\Big\{S_o^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]-\frac{5}{r^2}\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)^2\left[\vec{r}\vec{M}\right]+2\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)\left[\vec{S}_o\vec{M}\right]+2\left(\vec{S}_o\vec{r}\right)\left[\vec{P}\left[\vec{r}\vec{S}_o\right]\right]\Big\};$$

(26)

Осыдан $\vec{M},\vec{A}$ векторлары уақыт бойынша баяу өзгере отырып, екі түрлі қозғалысқа: эволюциялық және периодтық қозғалыстарға қатысатынын көреміз.

## Қолданылған әдебиет


[1]. Инфельд Л., Плебанский Е. Движение и релятивизм. М., 1962, 204 с.

[2]. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М., 1979. 430 с.